Examenul național de bacalaureat 2023
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

THEMA I (30 Punkte)

5p **1.** Gegeben ist die komplexe Zahl $z=3+i$. Zeige,dass $z(z-2i)=10$.

5p **2.** Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=5x+1$. Zeige, dass $f(2x)-2f(x)=-1$, für jede reelle Zahl x.

5p **3.** Löse in der Menge der reellen Zahlen die Gleichung $\sqrt[3]{x^3-2x+2}=x$.

5p **4.** Gegeben ist die Menge der natürlichen zweistelligen Zahlen A.Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass für eine gewählte Zahl n aus der Menge A, die Zahl $n+5$ ein Vielfaches von 10 ist.

5p **5.** Gegeben sind die Punkte $A(4,0)$ und $B(5,4)$ in dem kartesischen Koordinatensystem xOy Bestimme die Gleichung der Geraden d, die durch den Punkt O parallel zur Geraden AB geht.

5p **6.** Gegeben ist das gleichschenklige Dreieck ABC, rechtwinklig in A mit dem Flächeninhalt gleich 4. Zeige, dass $BC=4$.

THEMA II (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Matrix $A(a)=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 1 & -1 & a\\ a & a+1 & -2\end{pmatrix}$ und das Gleichungssystem $\begin{cases}2x+y+2z=2\\ x-y+az=4\\ ax+(a+1)y-2z=a\end{cases}$ wobei a eine reelle Zahl ist.

5p **a)** Zeige, dass $\det(A(0))=8$.

5p **b)** Bestimme die Menge der reellen Zahlen a so, dass die Matrix $A(a)$ umkehrbar ist.

5p **c)** Für $a=-2$ zeige, dass $x_0z_0+y_0=-2$ für jede Lösung (x_0,y_0,z_0) des Gleichungssystems.

2. Man definiert in der Menge der reellen Zahlen die Verknüpfung $x\circ y=xy+\left(2^x-2\right)\left(2^y-2\right)$.

5p **a)** Zeige, dass $2\circ 3=18$.

5p **b)** Zeige, dass $e=1$ das neutrale Element der Verknüpfung „$\circ$” ist.

5p **c)** Beweise, dass $x\circ(-x)\le 1$ für jede reelle Zahl x.

THEMA III (30 Punkte)

1. Gegeben ist die Funktion $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+3\ln\frac{x+3}{x-1}$.

5p **a)** Zeige, dass $f'(x)=\frac{x^2+2x-15}{(x-1)(x+3)}$, $x\in(1,+\infty)$.

5p **b)** Bestimme die Gleichung der schiefen Asymptote gegen $+\infty$ an das Schaubild der Funktion f.

5p **c)** Zeige, dass $\ln\frac{x+3}{3(x-1)}\ge 1-\frac{x}{3}$, für alle $x\in(1,+\infty)$.

2. Gegeben ist die Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\left(x^2+2x\right)e^{-x}$.

5p **a)** Zeige, dass $\int_0^3 f(x)e^x\,dx=18$.

5p **b)** Zeige, dass $\int_0^1 \frac{f(x)}{x+2}dx = \frac{e-2}{e}$.

5p **c)** Beweise, dass $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt\right) = 1$.